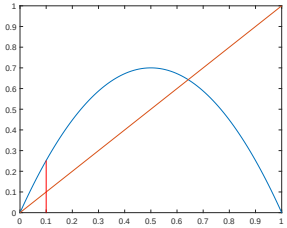
2-normált terek elmélete

Készítette: Sike András

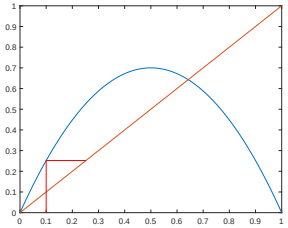
Témavezetők: Dr. Kovács Sándor, György Szilvia

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar



Tartalom

1. 2-normált terek
2. 2-metrikus terek
3. *n*-Banach-terek
   - Edelstein-féle fixponttétel
   - Weissinger-féle fixponttétel
   - Banach-féle fixponttétel
4. *n*-Hilbert-terek
   - Lineáris és nemlineáris Lax-Milgram-tételek
   - Zarantonello-tétel



2-norma

Definíció ([3]). Adott $\mathbb{V}$ vektortér esetén a $(\mathbb{V}, \|\cdot,\cdot\|)$ párt **2-normált tér**nek nevezzük, ha

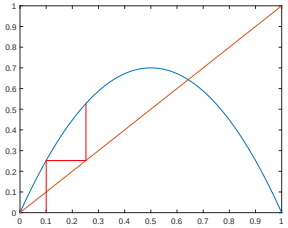
$$\forall x, y, z \in \mathbb{V} \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}:$$

(N1) $\|x, y\| = 0 \iff x, y$ lineárisan összefüggő;

(N2) $\|x, y\| = \|y, x\|$;

(N3) $\|\alpha x, y\| = |\alpha| \cdot \|x, y\|$;

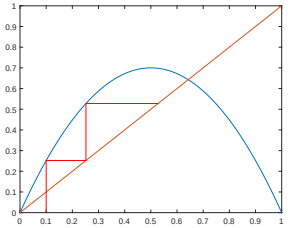
(N4) $\|x + z, y\| \leq \|x, y\| + \|z, y\|$.



Példák 2-normára

$\mathbb{R}^2$, ill. $\mathbb{R}^3$ felett 2-normát határoznak meg a következők:

- $\|\mathbf{u}, \mathbf{v}\| := \left|\det \begin{bmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{bmatrix}\right| \qquad (\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2);$
- $\|\mathbf{u}, \mathbf{v}\| := \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|_2 = \|\mathbf{u}\|_2 \cdot \|\mathbf{v}\|_2 \cdot \sin(\sphericalangle(\mathbf{u}, \mathbf{v})) \qquad (\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3).$



2-metrika

Definíció ([2]). Egy $\rho : S^3 \to \mathbb{R}$ függvényt **2-metrikának** hívunk, ha bármely $x, y, z, w \in S$ esetén

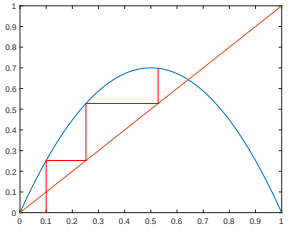
$$\text{(1a)} \quad \forall\ x = y \in S \quad \exists\ z \in S : \qquad \rho(x, y, z) \neq 0;$$

$$\text{(1b)} \quad \rho(x, y, z) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = y = z;$$

$$\text{(2)} \quad \rho(x, y, z) = \rho(x, z, y) = \rho(y, z, x);$$

$$\text{(3)} \quad \rho(x, y, z) \leq \rho(x, y, w) + \rho(x, w, z) + \rho(w, y, z).$$

Bizonyítható, hogy 2-normálhatóságból következik a 2-metrizálhatóság, de a metrizálhatóság már nem.



n-norma

Definíció ([1]). Adott $\mathbb{V}$ vektortér esetén a $(\mathbb{V}, \|\cdot, \ldots, \cdot\|)$ párt ***n*-normált térnek** hívjuk, ha

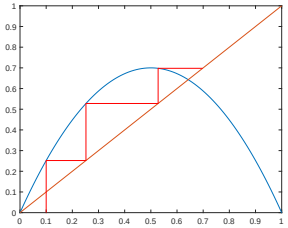
$$\forall x_1, \ldots, x_n, y \in \mathbb{V} \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}:$$

(N1) $\|x_1, \ldots, x_n\| = 0 \iff \{x_1, \ldots, x_n\}$ lineárisan összefüggnek;

(N2) $\|x_1, \ldots, x_n\| = \left\|x_{\phi(1)}, \ldots, x_{\phi(n)}\right\|$ az $\{1, \ldots, n\}$ minden ϕ permutációjára;

(N3) $\|\alpha x_1, x_2, \ldots, x_n\| = |\alpha| \cdot \|x_1, x_2, \ldots, x_n\|$;

(N4) $\|x_1 + y, x_2, \ldots, x_n\| \leq \|x_1, x_2, \ldots, x_n\| + \|y, x_2, \ldots, x_n\|$.



Példa *n*-normára

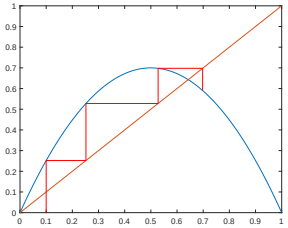
Ismeretes, hogy a vektoriális szorzat a következőképpen általanosítható:

$$x_1 \times \ldots \times x_n := \det \begin{bmatrix} e_1 & \ldots & e_{n+1} \\ x_{1,1} & \ldots & x_{1,n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n,1} & \ldots & x_{n,n+1} \end{bmatrix} \qquad (x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^{n+1})$$

ahol $x_{i,j}$ jelöli x_i vektor j-edik koordinátáját

$$(i \in \{1, \ldots, n\}), \quad j \in \{1, \ldots, n+1\}),$$

$$e_1, \ldots, e_{n+1} \in \mathbb{R}^{n+1} \quad \text{KB.}$$



Példa *n*-normára

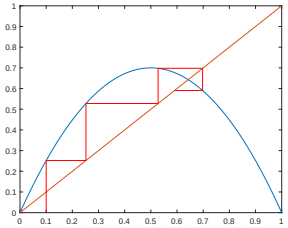
Tétel.

$$\|x_1,\dots,x_n\| := \|x_1\times\cdots\times x_n\|_2 = \left\|\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i-1}\det(E_i)\,e_i\right\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n+1}det\,(E_i)^2}$$

egy n-normát ad, ahol $E_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jelöli az

$$\begin{bmatrix} x_{1,1} & \dots & x_{1,n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n,1} & \dots & x_{n,n+1} \end{bmatrix}$$

mátrixot az i-edik oszlopa nélkül.



n-belső szorzat

Definíció ([5]). Adott $\mathbb{H}$ vektortér esetén a $(\mathbb{H}, \langle \cdot, \cdot | \cdot, \ldots, \cdot \rangle)$ párt ***n*-euklideszi tér**nek hívjuk, ha

$$\forall x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, y, z \in \mathbb{V} \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}:$$

(S1) $\langle x_1, x_1 | x_2, \ldots, x_n \rangle \geq 0$ és $\langle x_1, x_1 | x_2, \ldots, x_n \rangle = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $\{x_1, \ldots, x_n\}$ lineárisan összefüggő;

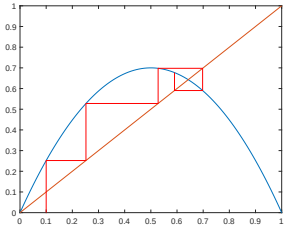
(S2) $\langle x_1, y | x_2, \ldots, x_n \rangle = \langle x_1, y | x_{\phi(2)}, \ldots, x_{\phi(n)} \rangle$ a $\{2, \ldots, n\}$ minden ϕ permutációjára;

(S3) $\langle x_1, y | x_2, \ldots, x_n \rangle = \overline{\langle y, x_1 | x_2, \ldots, x_n \rangle}$;

(S4) $\langle \alpha x_1, y | x_2, \ldots, x_n \rangle = \alpha \cdot \langle x_1, y | x_2, \ldots, x_n \rangle$;

(S5) $\langle x_1 + y, z | x_2, \ldots, x_n \rangle = \langle x_1, z | x_2, \ldots, x_n \rangle + \langle y, z | x_2, \ldots, x_n \rangle$;

(S6) $\langle x_1, x_1 | x_2, \ldots, x_n \rangle = \langle x_2, x_2 | x_1, \ldots, x_n \rangle$.



Az általánosított Edelstein-féle fixponttétel

Tétel. Legyen $(\mathbb{V}, \|\cdot, \ldots, \cdot\|)$ n-Banach-tér, $\mathcal{H} \subset \mathbb{V}$,

$$\phi : \mathcal{H} \to \mathcal{H},$$

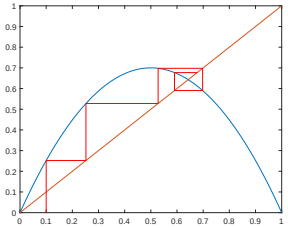
továbbá $b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{V}$ lineárisan független. Ha

$$\|\phi(u) - \phi(v), b_2, \ldots, b_n\| < \|u - v, b_2, \ldots, b_n\| \qquad (u, v \in \mathcal{H} : \ u \neq v),$$

akkor

- ϕ-nek legfeljebb egy fixpontja van $\mathcal{H}$-ban,
- kompakt $\mathcal{H}$ esetén ϕ-nek van fixpontja:

$$\exists | \, u \in \mathbb{V} : \quad \phi(u) = u.$$



Az általánosított Weissinger-féle fixponttétel

Tétel. Legyen $(\mathbb{V}, \|\cdot, \ldots, \cdot\|)$ egy n-Banach-tér és

$$\phi : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$$

egy leképezés. Tegyük fel, hogy

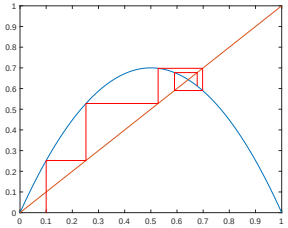
1. $(\alpha_n) \in l_1$;
2. valamely $b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{V}$ lineárisan független vektorok esetén

$$\left\| \phi^{[m]}(u) - \phi^{[m]}(v), b_2, \ldots, b_n \right\| \leq \alpha_m \|u - v, b_2, \ldots, b_n\|$$

$$(m \in \mathbb{N},\ u, v \in \mathbb{V}).$$

Ekkor ϕ-nek pontosan egy fixpontja van $\mathbb{V}$-ben:

$$\exists! \, u \in \mathbb{V} : \quad \phi(u) = u.$$



Az általánosított Banach-fixponttétel

Tétel. Legyen $(\mathbb{V}, \|\cdot, \ldots, \cdot\|)$ egy n-Banach-tér,

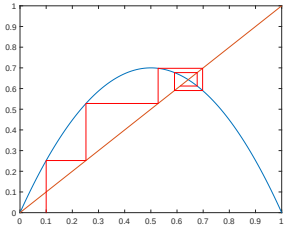
$$\phi : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$$

egy b-kontrakció, azaz alkalmas $q \in [0, 1)$ esetén

$$\|\phi(u) - \phi(v), b_2, \ldots, b_n\| \leq q \|u - v, b_2, \ldots, b_n\| \qquad (u, v \in \mathbb{V}),$$

ahol $b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{V}$ adott lineárisan független vektorok. Ekkor ϕ-nek pontosan egy fixpontja van:

$$\exists! u \in \mathbb{V} : \quad \phi(u) = u.$$



Az általánosított lineáris Lax-Milgram-tétel

Tétel. Legyen

$$T : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \times \{b_2\} \times \cdots \times \{b_n\} \to \mathbb{K}$$

b-korlátos, b-elliptikus, b-szeszkvilineáris forma, azaz alkalmas $0 < k \leq K < \infty$ számok esetén

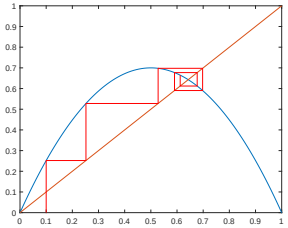
1. $|T(u, v, b_2, \ldots, b_n)| \leq K \|u, b_2, \ldots, b_n\| \cdot \|v, b_2, \ldots, b_n\|$;
2. $\Re(T(u, u, b_2, \ldots, b_n)) \geq k \|u, b_2, \ldots, b_n\|^2$.

Ekkor pontosan egy olyan bijektív $A \in L(\mathbb{H}, \mathbb{H})$ van, amire $\|A\| \leq K$ és

$$T(u, v, b_2, \ldots, b_n) = \langle Au, v | b_2, \ldots, b_n \rangle \qquad (u, v \in \mathbb{H}).$$

Továbbá

$$A^{-1} \in L(\mathbb{H}, \mathbb{H}) \qquad \text{és} \qquad \left\|A^{-1}\right\| \leq \frac{1}{k}.$$



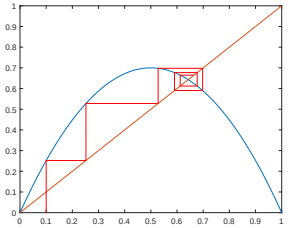
Az általánosított Zarantonello-tétel

Tétel. Legyen $(\mathbb{H}, \langle \cdot, \cdot | \cdot, \ldots, \cdot \rangle$ egy valós n-Hilbert-tér és $A : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ olyan operátor, amelyre alkalmas $0 < \alpha < 1$, ill. $L > 0$ és tetszőleges $x, y \in \mathbb{H}$ esetén

1. $\langle Ax - Ay, x - y | b_2, \ldots, b_n \rangle \geq \alpha \, \|x - y, b_2, \ldots, b_n\|$;
2. $\|Ax - Ay, b_2, \ldots, b_n\| \leq L \, \|x - y, b_2, \ldots b_n\|$.

Ekkor minden v vektorhoz létezik egy egyértelmű u, amelyre

$$Au = v.$$



Az általánosított nemlineáris Lax-Milgram-tétel

Tétel. Legyen $(\mathbb{H}, \langle \cdot, \ldots, \cdot \rangle)$ egy valós n-Hilbert-tér és
$T : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \times \{b_2\} \times \cdots \times \{b_n\} \to \mathbb{K}, \qquad S : \mathbb{H} \times \{b_2\} \times \cdots \times \{b_n\} \to \mathbb{K}$

1. tetszőleges $\alpha \in \mathbb{H}$ esetén

$$f_\alpha : \mathbb{H} \to \mathbb{R}, \qquad f_\alpha(x) := T(\alpha, x, b_2, \ldots, b_n)$$

   funkcionál b-folytonos és lineáris;
2. alkalmas $\gamma > 0$, ill. tetszőleges $x, y \in \mathbb{H}$ esetén

$$\gamma \|x - y, b_2, \ldots, b_n\|^2 \leq T(x, x - y, b_2, \ldots, b_n) - T(y, x - y, b_2, \ldots, b_n);$$

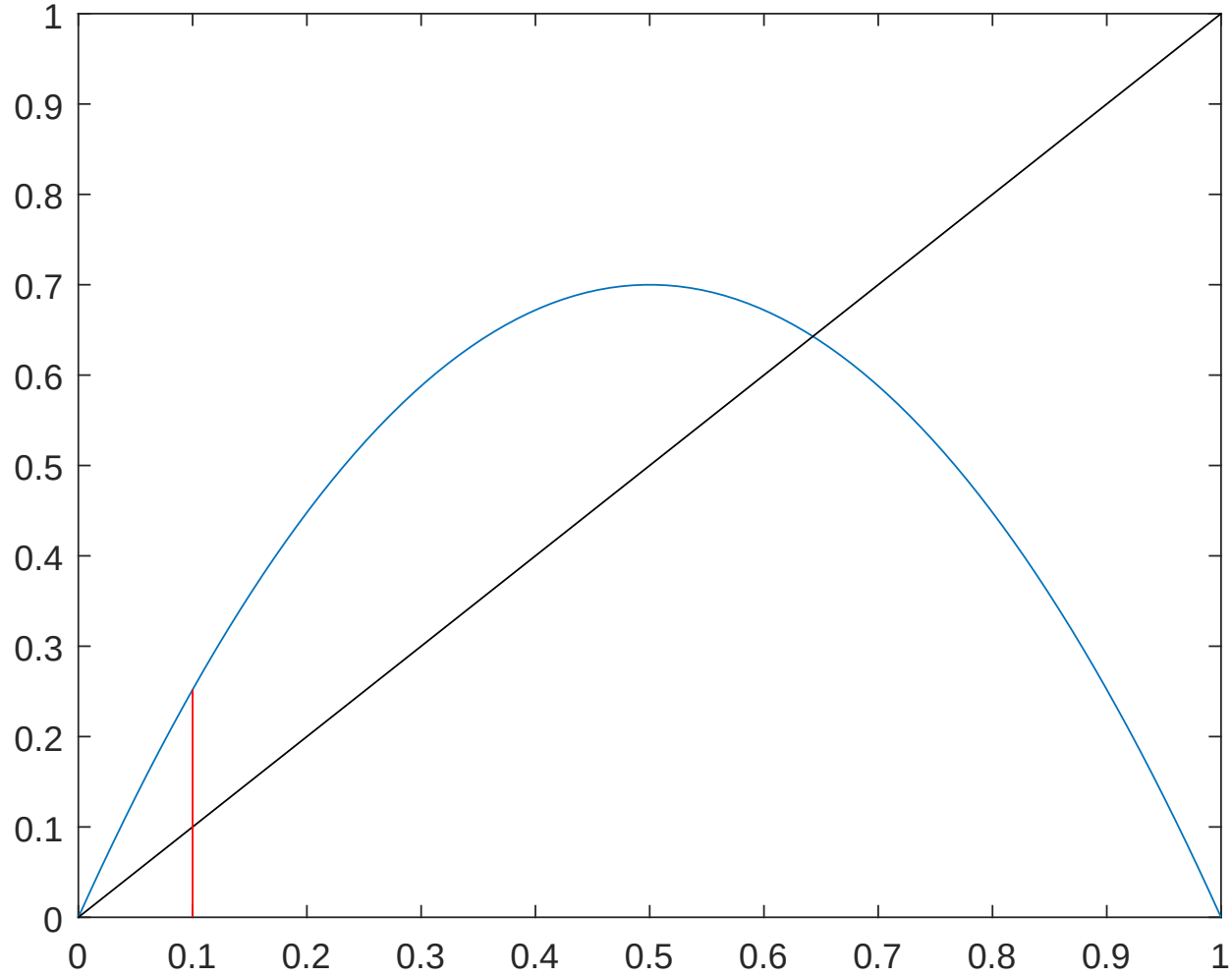
3. van olyan $L > 0$, hogy bármely $x, y, z \in \mathbb{H}$ elemre

$$|T(x, z, b_2, \ldots, b_n) - T(y, z, b_2, \ldots, b_n)| \leq L \|x - y, b_2, \ldots b_n\| \cdot \|z, b_2, \ldots, b_n\|;$$

4. S lineáris és b-folytonos.

Ekkor minden $\forall v \in \mathbb{H}$ $\exists | u \in \mathbb{H}$: $T(v, u, b_2, \ldots, b_n) = S(u, b_2, \ldots, b_n)$.

k



- Brzdęk, J. ; Ciepliński, K.: *A fixed point theorem in n-Banach spaces and Ulam stability*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **470**(1) (2019), 632–646.
- Gähler, S.: *2-metrische Räume*, Mathematische Nachrichten, **26** (1963), 115–148.
- Gähler, S.: *Lineare 2-normierte Räume*,Mathematische Nachrichten, **28** (1964), 1–43.
- Ghosh, P.; Samanta, T. K.: *A few fixed point theorems in linear n-normed space*, arXiv preprint arXiv:2210.07849.
- Ghosh, P.; Samanta, T. K.: *Generalized Riesz Representation Theorem in n-Hilbert space*, arXiv preprint arXiv:2203.04293.
- Kovács, S.: *Funkcionálanalízis feladatokban, egyetemi jegyzet*, Budapest, 2013. ISBN: 978-963-284-445-9
- Zeidler, E.: *Applied Functional Analysis, Applications to Mathematical Physics*, Springer Verlag, 1995.